Université Paris-Diderot
U1FA36 - Fonctions holomorphes

Année 2015-2016
L3 Maths

Interrogation écrite 1

11 Fevrier 2016

Durée : 1 heure

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1.

(a) Soit $h(z)$ la somme d'une série entière convergente $S = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $h(z) \neq 0$ pour tout z tel que $0 < |z| < r$.

(b) Soit Ω un ouvert connexe, et $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Énoncer le principe de prolongement analytique.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathfrak{i}\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1 + \mathfrak{i}z}{1 - \mathfrak{i}z}$.

(a) Montrer que f définit un biholomorphisme (fonction bijective holomorphe avec fonction réciproque holomorphe) entre $\mathbb{C} \setminus \{-\mathfrak{i}\}$ et son image par f.

(b) Calculer $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, où $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.

On dit que une fonction analytique $g : \Omega \to \mathbb{C}$ est une détermination de arctan si $\tan(g(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

(c) Supposons que g soit une détermination de arctan. Donner une expression de sa dérivée (au sens complexe) g'.

(d) Est-ce qu'il existe une détermination de arctan sur $U = \mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{i}t \mid t \in [-1, 1]\}$?

(e) Montrer qu'il existe une détermination g de arctan sur $V = \mathbb{C} \setminus \{\mathfrak{i}t \mid t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\}$ telle que $g(0) = 0$.

Considerons la série entière

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

(f) Calculer le rayon de convergence de S. On dénote par D le disque de convergence de S, et par $h(z)$ la somme de S en $z \in D$.

(g) Montrer que g est le prolongement analytique de $h : D \to \mathbb{C}$ à V.